EX 37 :

$n \geq 1$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx$$

1) a) soit $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$; $x \in [0,1]$

$$f'(x) = \frac{-(2x+1)}{(1+x+x^2)^2} < 0$$

f est décroissante sur $[0,1]$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq (x) \leq f(0) \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+x^2+x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2+x} \leq x^n \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{3}x^n dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

2) a) $n \geq 1$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx$$

intégration par parties :

$$\begin{cases} U'(x)=x^n \xrightarrow{p} U(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ V(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \xrightarrow{d} V'(x) = \frac{-(2x+1)}{(1+x+x^2)^2} \end{cases}$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{1+x+x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx$$

b) $3(n+1).I_n = 1 + 3\int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx$ (*)

soit $g(x) = \frac{(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$; $x \in [0,1]$

* $g'(x) = \frac{-6(x^2+x)}{(1+x+x^2)^3} \leq 0$

g est décroissante sur $[0,1]$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq (0) \Rightarrow \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{9}x^{n+1} \leq \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2} \leq x^{n+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{9}x^{n+1}dx \leq \int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leq \int_0^1 x^{n+1}dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{9}\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leq \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3(n+2)} \leq 3\int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leq \frac{3}{n+2}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{3(n+2)} \leq 3(n+1).I_n \leq 1+\frac{3}{n+2}$$ (d'aprés *)

c) $1+\frac{1}{3(n+2)} \leq 3n.I_n + 3I_n \leq 1+\frac{3}{n+2}$

$$\Rightarrow 1-3I_n+\frac{1}{3(n+2)} \leq 3n.I_n \leq 1-3I_n+\frac{3}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}-I_n+\frac{1}{9(n+2)} \leq n.I_n \leq \frac{1}{3}-I_n+\frac{1}{n+2}$$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-I_n+\frac{1}{9(n+2)}\right) = \frac{1}{3}$ car $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-I_n+\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{3}$

d'où $\lim_{n\to+\infty} n.I_n = \frac{1}{3}$

EX 38 :

$x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}.dt$$

1) la fonction : f: $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

la fonction : $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\sin\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = [0,1] \subset [-1,1]$, et $0 \in [-1,1]$

d'où F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et

Oarray.tn -Aqra Blech- Oarray.tn